数理解析研究所講究録 1317 巻 2003 年 145-156



# 自然数の開平とペル方程式

東北大学名誉教授　土倉 保 (Tamotsu Tsuchikura)
Professor Em.,
Tohoku University

自然数の平方根を求めることは，和算家の基本知識であるが，とくに「開平方を用いず」に求めるということを強調して述べているものがある．これは一つの手際のよい計算法とみなされていたように思われる．そのいくつかの方法は現在の知識からみれば，テーラー展開であったり，2次方程式の Horner-関の解法であったりするが，ここでは今一つの漸化式による逐次近似法に注目してみたい．

筆者は川井久徳(1766-?)「算術開平新法」(1805)の附録で初めて知った結果だが，実は會田安明(1747-1817)の「算法零約術」(乾之巻，坤之巻)に述べられている方が年代が早いかとも思われるものである．定理1，定理2として現代風に述べよう．まず

**定理1**　$a_0 \geq b_0 \geq 1$ となる定数2個を与えておく．そして $n=1,2,\cdots$ に対して

$$a_n = 2a_{n-1}^2 - 1 \tag{1}$$

$$b_n = 2a_{n-1}b_{n-1} \tag{2}$$

として数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ を定義すれば次のことが成立する:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{\frac{a_0^2-1}{b_0^2}}$$

和算家はこの定理を平方根の計算に用いたというより，むしろ平方根の値を調べてこの定理を見出したように思われる．このあたりについては後述する．

この定理の証明は現代では大学初年級程度かと思われるが，伊藤朋幸氏(宮城県一女高)の明快な説明があるのでそれを紹介する．

$N$ を一つの正の数として行列 $\begin{pmatrix} a_n & Nb_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ を定義しよう．まず

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} & Nb_{n-1} \\ b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a_{n-1}^2 + Nb_{n-1}^2 & 2Na_{n-1}b_{n-1} \\ 2a_{n-1}b_{n-1} & a_{n-1}^2 + Nb_{n-1}^2 \end{pmatrix} \quad (n=0,1,\cdots) \tag{3}$$

だから，この右辺の行列を

$$\begin{pmatrix} a_n & Nb_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix} \quad (n=1,2,\cdots) \tag{4}$$

と定義する．すなわち $a_0$，$b_0$ が与えられたとき

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1}^2 + Nb_{n-1}^2 \\ b_n = 2a_{n-1}b_{n-1} \end{cases} \quad (n=1,2,\cdots) \tag{5}$$

として$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を順次定義するのである．従って

$$\begin{pmatrix} a_n & Nb_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & Nb_{n-1} \\ b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}^2 = \cdots = \begin{pmatrix} a_0 & Nb_0 \\ b_0 & a_0 \end{pmatrix}^{2^n}. \tag{6}$$

ここで $\begin{vmatrix} a_0 & Nb_0 \\ b_0 & a_0 \end{vmatrix} = \pm 1$　すなわち　$a_0{}^2 - Nb_0{}^2 = \pm 1$　(7)

となるように$a_0$，$b_0$が定められたとする（後述するPell方程式）と，

$$\begin{vmatrix} a_n & Nb_n \\ b_n & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & Nb_0 \\ b_0 & a_0 \end{vmatrix}^{2^n} = 1 \quad (n = 1,2,\cdots)\,(n \neq 0\text{に注意}), \tag{8}$$

すなわち　$a_n{}^2 - Nb_n{}^2 = 1 \quad (n = 1,2,\cdots)\,(n = 0\text{のときは}(7))$.　(9)

(5)にこれを代入すると（$N$を消去する）

$$a_n = \begin{cases} 2a_0{}^2 \mp 1 & (n = 1\text{のとき．複号は}(7)\text{の右辺と同順}) \\ 2a_{n-1}{}^2 - 1 & (n = 2,3,\cdots\text{のとき}) \end{cases},$$

$$b_n = 2a_{n-1}b_{n-1}$$

これは$n = 2,3,\cdots$のとき所要の漸化式 (1)，(2)である．そして$a_0 > b_0 \geq 1$なら$b_n{}^2 \to \infty\,(n \to \infty)$は明らかであるから(9)から$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n{}^2}{b_n{}^2} = N$が得られ定理１の証明ができたことになる．

次の例１，２は上記の「算術開式新法」に述べられているものである．

**例１**　辺の長さ１の正方形の対角線の長さを求めよ．

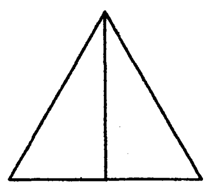
これは$\sqrt{2}$の数値を求めていることだが，天下りに$a_0 = 3$，$b_0 = 2$ を与えている（もちろん$3^2 - 2\cdot 2^2 = 1$だからPell方程式をみたす．すなわち$\sqrt{\dfrac{3^2-1}{2^2}} = \sqrt{2}$）．そして

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{2a_0{}^2 - 1}{2a_0 b_0} = \frac{2\cdot 3^2 - 1}{2\cdot 2\cdot 3} = \frac{17}{12} = \underline{1.41}\dot{6}, \qquad \frac{a_2}{b_2} = \frac{2\cdot 17^2 - 1}{2\cdot 17\cdot 12} = \frac{577}{408} = \underline{1.41421}568627,$$

$$\frac{a_3}{b_3} = \frac{2\cdot 577^2 - 1}{2\cdot 577\cdot 408} = \frac{665857}{470832} = \underline{1.41421356237}4$$

これであといくらでも求められるといっている．

**例２**　辺の長さが１の正三角形の高さ（中鈎）を求めよ．



$a_0 = 7$，$b_0 = 8$ とすると$\left(\sqrt{\dfrac{a_0{}^2 - 1}{b_0{}^2}} = \dfrac{\sqrt{48}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$$\frac{a_0}{b_0}=\frac{7}{8}=\underline{0.8}75\,,\quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{97}{112}=\underline{0.8660}7142857\,,$$

$$\frac{a_2}{b_2}=\frac{18817}{21728}=\underline{0.866025405}\,,\quad \frac{a_3}{b_3}=\frac{708{,}158{,}977}{817{,}711{,}552}=\underline{0.86602540378443864}7$$

（アンダーラインの桁まで正しい）

**例３**　$\sqrt{5}$ を求めるには　$a_0=9$，$b_0=4$ とできる$\left(a_0{}^2-5\cdot b_0{}^2=9^2-5\cdot 4^2=1\right)$から

$$\frac{a_0}{b_0}=\frac{9}{4}=\underline{2.2}5\,,\qquad \frac{a_1}{b_1}=\frac{2\cdot 9^2-1}{2\cdot 9\cdot 4}=\frac{161}{72}=\underline{2.236}111\cdots,$$

$$\frac{a_2}{b_2}=\frac{2\cdot(161)^2-1}{2\cdot 161\cdot 72}=\frac{51{,}841}{23{,}184}=\underline{2.236067977}91\,,$$

$$\frac{a_3}{b_3}=\frac{2(51841)^2-1}{2\cdot(51{,}841)\cdot(23{,}184)}=\frac{5{,}374{,}978{,}561}{2{,}403{,}763{,}488}=\underline{2.23606797749}$$

**例４**　(7)の右辺を$-1$とすると　$a_0{}^2-Nb_0{}^2=-1$で，$N$=2 のとき $a_0=b_0=1$ も解だが，このときは $a_1=2a_0{}^2+1=3$，$b_1=2a_0b_0=2$ となって例１に帰着する．しかし $a_0=7$，$b_0=5$ もまた一つの解である．$\left(7^2-2\cdot 5^2=-1\right)$

このときは　$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{2\cdot 7^2+1}{2\cdot 7\cdot 5}=\dfrac{99}{70}=\underline{1.414}28571428$，　$\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{2\cdot 99^2-1}{2\cdot 99\cdot 70}=\dfrac{19601}{13860}=\underline{1.41421356}421$，

$$\frac{a_3}{b_3}=\frac{768{,}398{,}401}{543{,}339{,}720}=\underline{1.41421356237}$$

ここで問題は$N$（自然数としよう）が与えられたとき，(7)すなわち

$$a_0{}^2-Nb_0{}^2=\pm 1$$

となるように整数 $a_0$，$b_0$ が決められるか，ということになる．これは古典的な **Pell の方程式**といわれるものである．右辺が１であるときが本来のものであって，$-1$のときは関連問題と考えられよう．何れの場合も解決されている．すなわち，右辺=1 の場合を述べれば

平方数でない自然数$N$に対して

$$x^2-Ny^2=1 \tag{10}$$

を満たす正の整数の組$(x,y)$は必ず存在し，そのうち最小のものの組を$\alpha_0$，$\beta_0$ とする．$\left(\alpha_0+\beta_0\sqrt{N}\right)^k$を展開して整理したものを$\alpha_k+\beta_k\sqrt{N}$ とすると，この$\alpha_k$，$\beta_k$ もまた(10)の解になっている．

この定理は通常，連分数を用いて証明されているが，歴史的にも色々エピソードがあるようである．Lagrange は $N$=2～1003 についての解$\alpha_0$，$\beta_0$の表を与え，後に，この表はさらに詳しくなっている．最近でもこの解を求める手法についての論文が出ている．Lagrange の表は 1800 年前後である．（なお註１，２参照）

**定理２**　正の数 $a_0$, $b_0$ を Pell 方程式　$x^2 - Ny^2 = 1$ の一つの解とする．($N$ は正で平方数でない)，そして，$a_{-1} = 1$, $b_{-1} = 0$ とし，$n = 1,2,3,\cdots$ については，

$$\begin{cases} a_n = 2a_0 a_{n-1} - a_{n-2} \\ b_n = 2a_0 b_{n-1} - b_{n-2} \end{cases}$$

と定義すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{N}$ .

これは定理１と同じ結論で，會田安明「算法零約術乾之巻」に述べられている．こちらの方は分母子が別々に線形な漸化式で計算できるのが特長である．$N$=2 の場合のみ述べられている．そして，それは経験的，帰納的に得たもののようである．

**証明**　$\{a_n\}$ についての漸化式 $a_n - 2a_0 a_{n-1} + a_{n-2} = 0$ は $a_n - pa_{n-1} = q(a_{n-1} - pa_{n-2})$ の形に変形できる．それには $x^2 - 2a_0 x + 1 = 0$ の解 $a_0 \pm \sqrt{a_0{}^2 - 1} = a_0 \pm b_0\sqrt{N}$ を $p$, $q$ とすればよいことは係数を比較して了解される．ここで $n$ を順次下げていけば，$a_n - pa_{n-1} = q^n(a_0 - pa_{-1})$ が得られる．$p$ と $q$ を交換して同様の変形をすれば，$a_n - qa_{n-1} = p^n(a_0 - qa_{-1})$ ．この２式から $a_{n-1}$ を消去して，

$$(q-p)a_n = (q^{n+1} - p^{n+1})a_0 - (pq^{n+1} - p^{n+1}q)a_{-1} .$$

$a_0 \neq 1$，$p \neq q$，そして $pq$=1 に注意して，$(q-p)a_n = (q^{n+1} - p^{n+1})a_0 - (q^n - p^n)a_{-1}$ が得られる．$\{b_n\}$ も同様で，$(q-p)b_n = (q^{n+1} - p^{n+1})b_1 - (q^n - p^n)b_{-1}$，この２式を辺々割って，

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(q^{n+1} - p^{n+1})a_0 - (q^n - p^n)a_{-1}}{(q^{n+1} - p^{n+1})b_0} .$$

ここで，$pq$=1 で $p$>0, $q$>0 だから $q$>1, 0<$p$<1 と考えてよい．ゆえに，$q = a_0 + b_0\sqrt{N}$ ．$p^n \to 0$, $q^n \to \infty (n \to \infty)$ だから分母子を $q^n$ で割って $n\to\infty$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{qa_0 - 1}{qb_0} = \frac{(a_0 + b_0\sqrt{N})a_0 - 1}{(a_0 + b_0\sqrt{N})b_0} = \sqrt{N} \cdot \frac{a_0{}^2 + a_0 b_0\sqrt{N} - 1}{a_0 b_0\sqrt{N} + b_0{}^2 N} = \sqrt{N} \quad \left(\because b_0{}^2 N = a_0{}^2 - 1\right).$$

**例５**　$N$=2, $(a_0, b_0)$=(3, 2) としよう．漸化式は

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2} \\ b_n = 6b_{n-1} - b_{n-2} \end{cases} (n = 2,3,\cdots)$$

となる．$\dfrac{a_0}{b_0} = 1.5$，$\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{6\cdot 3 - 1}{6\cdot 2} = \dfrac{17}{12} = \underline{1.41}\dot{6}$，$\dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{6\cdot 17 - 3}{6\cdot 12 - 2} = \dfrac{99}{70} = \underline{1.41428}5$，

$$\frac{a_3}{b_3}=\frac{6\cdot 99-17}{6\cdot 70-12}=\frac{577}{408}=\underline{1.41421}56,\quad \frac{a_4}{b_4}=\frac{6\cdot 577-99}{6\cdot 408-70}=\frac{3363}{2378}=\underline{1.41421}362489$$

**例6**　$N$=2，$(a_0, b_0)$=(17, 12)とすると，漸化式は

$$\begin{cases} a_n=34a_{n-1}-a_{n-2} \\ b_n=34b_{n-1}-b_{n-2} \end{cases}$$

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{34\cdot 17-1}{34\cdot 12}=\frac{577}{408}=\underline{1.41421}568,\qquad \frac{a_2}{b_2}=\frac{34\cdot 577-17}{34\cdot 408-12}=\frac{19601}{13860}=\underline{1.414213564}21,$$

$$\frac{a_3}{b_3}=\frac{34\cdot 19601-577}{34\cdot 13860-408}=\frac{665857}{470832}=\underline{1.41421356237}$$

この例6の数値計算は會田安明が上記の本に記してある．しかし定理1にしても定理2にしても，Pell 方程式の解になっているという意識はないように思われる．前にも述べたように連分数展開の近似分数を並べてその奇数番目に注目して試してみよといっている．因みに$\sqrt{2}$の連分数展開は$[1;\dot{2}]$で順に書けば（彼の本にも書いてある）（註5参照）

$\alpha_1=\frac{3}{2}$，$\alpha_2=\frac{7}{5}$，$\alpha_3=\frac{17}{12}$，$\alpha_4=\frac{41}{29}$，$\alpha_5=\frac{99}{70}$，$\alpha_6=\frac{239}{169}$，$\alpha_7=\frac{577}{408}$，$\alpha_8=\frac{1393}{985}$，
$\alpha_9=\frac{3363}{2378}$，$\alpha_{10}=\frac{8119}{5741}$，$\alpha_{11}=\frac{19601}{13860}$，$\alpha_{12}=\frac{47321}{33461}$，$\alpha_{13}=\frac{114243}{80782}$，$\alpha_{14}=\frac{275807}{195025}$，
$\alpha_{15}=\frac{665857}{470832}$，$\alpha_{16}=\frac{1607521}{1136689}$，$\alpha_{17}=\frac{3880899}{2744210}$，$\alpha_{18}=\frac{9369319}{6625109}$，$\alpha_{19}=\frac{22619537}{15994428}$，
$\alpha_{20}=\frac{54608393}{38613965}$，$\alpha_{21}=\frac{131836323}{93222358}$，$\alpha_{22}=\frac{318281039}{225058681}$，$\alpha_{23}=\frac{768398401}{543339720}$，…

前に挙げた例のうち$\sqrt{2}$の計算をしているものをふりかえってみよう．例1では$\frac{3}{2}=\alpha_1$ から始めて$\alpha_3$，$\alpha_7$，$\alpha_{15}$が求められている．また例4では$\frac{7}{5}=\alpha_2$から順に$\alpha_5$，$\alpha_{11}$，$\alpha_{23}$が求められ，例6では$\frac{17}{12}=\alpha_3$から順次$\alpha_7$，$\alpha_{11}$，$\alpha_{15}$が求められている．

和算家は数値の取り扱いとしては，小数表示よりも分数表示を好んでいたようにも思われる．上述の平方根の求め方もそうであるが，円周率の計算でも，いわゆる円理によって小数点以下何桁も求めていながら，それをわざわざ分数の形に簡潔に表わそうとしている．その有力な方法は連分数に直していってその近似分数をとることである．堀江城真「平方零約諺解」寛延元年(1748)には「何程ニテモ積ヲ開平方トキトコマテモ不尽止サルモノ是ヲ治メント思ハハ此平方零約之術ヲ用ヨトナリ」と述べられている．

円周率についても，手間をかけて小数表示から分数による近似値$\frac{22}{7}$，$\frac{355}{113}$などを導いていることはよく知られていることである．

小数表示と分数表示では，算盤や算木の利用に，とくに便，不便の優劣があったとも思われないし，いずれの表示でも用いる数字の個数が，そう違っているものではないことは$\sqrt{2}$の連分数表示の近似分数をみても分かる．分数形にした方がコンパクトで美しいと感じた面があるのかも

會田安明は定理の初期条件にあたる $a_0$, $b_0$ を求めることについては（Pell 方程式の解を系統的に求めることは無理である）次のようにいっている．平方根の連分数展開の近似分数を順に並べていって，（$\sqrt{2}$ なら $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, …）その奇数番目について順に試してみよ．$a_0$, $b_0$ がダメだったら $a_2$, $b_2$, それがまたダメだったら $a_4$, $b_4$, …（ここでは書き方がずれているので偶数の添数になっている）というわけである．そして「算法零約術坤之巻・坤之下」では素数 $N$=2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31 についての初期値 $a_0$, $b_0$ の値を挙げている．勿論末尾のページの解の表と同じである．

しかし定理１にしても定理２にしても，これは平方根の簡単な求め方とはいえないであろう．和算家は結論を知ってから，それに導く方法を如何に簡潔に出すかという美的な関心によるものであろう．実際，會田安明はこの本でも，自分の説明は何字ですませているが，誰々のはそれより多い何字を使っているので冗長で良くないという言い方をして自慢している．

**註１**　Pell 方程式は Euler が Goldbach に宛てた手紙(1730-8-10)の中で Pell の名をつけて述べたという．Euler は Pell がこの解の求め方を発見したと信じたからといわれている．しかし Pell が実際に解いたのではなく，Fermat が 1657 年にこの方程式を問題にしたのだから，むしろ Fermat の方程式と呼ぶべきだともいわれている．（藤原，「明治前日本数学史」ではこうよんでいる）

Colebrooke, Algebra of Hindoos, 1800, pp.363-373 では，印度のブラーマグプタがこの Pell 方程式を解いたと述べている，実際，Lagrange は連分数論を用いて解決した：Lagrange, Mem. d'Acad. Berlin, 1767; Oeuvres 2, p.102．また，この方程式の歴史については Konen, Geschichte der Gleichung $t^2-Du^2=1$, 1901 で述べられている．解($a_0$, $b_0$)の表は Lagrange, Essai sur la théorie des nombres, 3ed. t.1 の巻末第 10 表($N$=2～1003)，Cayley, Collected Math. Papers, 13, p.431($N$=1001～1500)，Whitfond, The Pell's Equation, NY, 1912($N$=1501～1700)（以上文献は藤原松三郎，「代数学」上による）．解説書は例えば，I.Niven-H.S.Zuckerman, An introduction to the theory of numbers, John-Wiley，邦書では藤原，「代数学」の外にも，例えば高木貞治「初等整数論」などがあり，竹内端三「整数論」には連分数を用いない解説もされている．最近では，日本評論社「数学おもちゃ箱」志賀弘典に Lagrange の方法が解説されていると知らされた．　また Notices of the Amer. Math. Soc. vol49#2, 2002 pp.182-192 では解を求める速さなどについての論文がある：H.W.Lenstra Jr., Solving the Pell Equation. ここには関連した文献も記されている．

**註２**　自然数 $N$ に対して，$\sqrt{N}$ の連分数展開の周期を $r$, 第 $n$ 近似分数を $\frac{h_n}{k_n}$ と書くことにする．

便宜のために述べると Pell 方程式の解は次のようである．

(i) Pell 方程式 $x^2-Ny^2=1$ の自然数解は $r$ が偶数のときは

$$x=h_{nr-1},\ y=k_{nr-1}\ (n=1,2,\cdots)$$

で与えられる．$r$ が奇数のときは $n$=2,4,6,…で与えられる．

(ii) 方程式 $x^2-Ny^2=-1$ の自然数解は $r$ が偶数のときは存在しない．$r$ が奇数のときは

$$x=h_{nr-1},\ y=k_{nr-1}\ (n=1,3,5,\cdots)$$

で与えられる．

例えば$N$=2 のとき$\sqrt{2}=[1;\dot{2}]$は周期 1 で$\dfrac{h_0}{k_0}=\dfrac{1}{1}$，$\dfrac{h_1}{k_1}=\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{h_2}{k_2}=\dfrac{7}{5}$，$\dfrac{h_3}{k_3}=\dfrac{17}{12}$，$\dfrac{h_4}{k_4}=\dfrac{41}{29}$，…（例6のすぐあとの$\alpha_1$，$\alpha_2$，…である）．

$h_0^{\ 2}-Nh_0^{\ 2}=1^2-2\cdot1^2=-1$ ，　$h_1^{\ 2}-Nh_1^{\ 2}=3^2-2\cdot2^2=1$ ，　$h_2^{\ 2}-Nh_2^{\ 2}=7^2-2\cdot5^2=-1$ ，
$h_3^{\ 2}-Nh_3^{\ 2}=17^2-2\cdot12^2=289-288=1$，　$h_4^{\ 2}-Nh_4^{\ 2}=41^2-2\cdot29^2=1681-1682=-1$

$N$=7 のときは$\sqrt{7}=[2;\dot{1},1,1,\dot{4}]$は周期 4 をもつ．

$\dfrac{h_1}{k_1}=\dfrac{3}{1}$，$\dfrac{h_2}{k_2}=\dfrac{5}{2}$，$\dfrac{h_3}{k_3}=\dfrac{8}{3}$，$\dfrac{h_4}{k_4}=\dfrac{37}{14}$，$\dfrac{h_5}{k_5}=\dfrac{45}{17}$，$\dfrac{h_6}{k_6}=\dfrac{82}{31}$，$\dfrac{h_7}{k_7}=\dfrac{127}{48}$，…，$\dfrac{h_{11}}{k_{11}}=\dfrac{2024}{765}$，…，

$\dfrac{h_{15}}{k_{15}}=\dfrac{32,257}{12,192}$，… で$(h_3,k_3)$，$(h_7,k_7)$ ，$(h_{11},k_{11})$ ，$(h_{15},k_{15})$について

$h_3^{\ 2}-Nk_3^{\ 2}=8^2-7\cdot3^2=1$，　$h_7^{\ 2}-Nk_7^{\ 2}=127^2-7\cdot48^2=16129-16128=1$，

$h_{11}^{\ 2}-Nk_{11}^{\ 2}=(2024)^2-7\cdot(765)^2=4{,}096{,}576-4{,}096{,}575=1$，　$h_{15}^{\ 2}-Nk_{15}^{\ 2}=(32257)^2-7\cdot(12191)^2=1$．

**註３**　平方根の逐次近似としては，バビロニアとかギリシャの数学でも知られていたといわれる漸化式がある（例えば，近藤洋逸数学史著作集，第 3 巻，数学の誕生，佐々木力編，日本評論社 1994）．それは，正の数$N$の平方根を求めるために，$c_0$を任意にきめておいて，

$$c_n=\frac{1}{2}\left(c_{n-1}+\frac{N}{c_{n-1}}\right)\quad(n=1,2,\cdots)\tag{11}$$

とすると$\lim_{n\to\infty}c_n=\sqrt{N}$となるというのである．または$x^2-N=0$の解を，Newton の方法で近似解をもとめることにしてもこの漸化式になることも知られている．（著者，「同文算指」の開平法，数学教育研究，大阪教育大，26 号，1996）

いま，$c_n$を分数の形で求めるために，$c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$とおいて，上の(11)に代入してみると

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{2}\left(\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}+\frac{Nb_{n-1}}{a_{n-1}}\right)=\frac{a_{n-1}^{\ 2}+Nb_{n-1}^{\ 2}}{2a_{n-1}b_{n-1}}.$$

ゆえに，分母子を別々に等しいとおいて漸化式

$$\begin{cases}a_n=a_{n-1}^{\ 2}+Nb_{n-1}^{\ 2}\\ b_n=2a_{n-1}b_{n-1}\end{cases}\tag{12}$$

を作ることが考えられる．ここで，もし$a_0$, $b_0$が Pell 方程式の解ならば$a_0^{\ 2}-Nb_0^{\ 2}=1$，従って(12)から

$$\begin{cases}a_1=a_0^{\ 2}+Nb_0^{\ 2}=a_0^{\ 2}+(a_0^{\ 2}-1)=2a_0^{\ 2}-1\\ b_1=2a_0b_0\end{cases}$$

で(8), (9)の式を導いたように，$a_n^2-Nb_n^2=1$も（帰納法でも）示され，上の(12)は定理１の(1), (2)に帰着するといってもよい．すなわち，近似の初期値として Pell 方程式の解をとるなら，定理１，はこの(11)を利用することと同じである．

もちろん，Pell 方程式を使わないで，(12)のままでやれば，(11)がえられるから

$$\left|c_n-\sqrt{N}\right|=\frac{1}{2c_{n-1}}(c_{n-1}-\sqrt{N})^2\leq\frac{1}{2\sqrt{N}}(c_{n-1}-\sqrt{N})^2$$

（$\because c_n\geq\sqrt{N}$ は相加相乗平均の大小からわかる($n$=1,2,…)）．ゆえに

$$\left|c_n-\sqrt{N}\right|\leq\frac{1}{\left(2\sqrt{N}\right)^n}\left|c_0-\sqrt{N}\right|^{2^n}\to 0\ (n\to\infty)\quad .$$

**註４**　$N$を平方数でない自然数として，$\dfrac{a_0}{b_0}$ を$\sqrt{N}$ の初期近似の分数とする．

(i)　$\dfrac{a_0}{b_0}>\sqrt{N}$ としておこう．そうすると

$$\frac{a_0}{b_0}-\sqrt{N}=\frac{a_0-b_0\sqrt{N}}{b_0}=\frac{a_0^2-b_0^2N}{b_0(a_0+b_0\sqrt{N})}\overset{>}{\approx}\frac{a_0^2-b_0^2N}{b_0\left(a_0+b_0\dfrac{a_0}{b_0}\right)}=\frac{a_0^2-b_0^2N}{2a_0b_0}$$

$$\therefore\sqrt{N}\overset{<}{\approx}\frac{a_0}{b_0}-\frac{a_0^2-b_0^2N}{2a_0b_0}=\frac{2a_0^2-(a_0^2-b_0^2N)}{2a_0b_0}=\frac{a_0^2+b_0^2N}{2a_0b_0}\equiv\frac{a_1}{b_1}\quad\text{（と置く）}$$

$$\frac{a_1}{b_1}-\sqrt{N}=\frac{a_1-b_1\sqrt{N}}{b_1}=\frac{a_1^2-b_1^2N}{b_1(a_1+b_1\sqrt{N})}\overset{>}{\approx}\frac{a_1^2-b_1^2N}{b_1\left(a_1+b_1\dfrac{a_1}{b_1}\right)}=\frac{a_1^2-b_1^2N}{2a_1b_1}$$

$$\therefore\sqrt{N}\overset{<}{\approx}\frac{a_1}{b_1}-\frac{a_1^2-b_1^2N}{2a_1b_1}=\frac{2a_1^2-(a_1^2-b_1^2N)}{2a_1b_1}=\frac{a_1^2+b_1^2N}{2a_1b_1}\equiv\frac{a_2}{b_2}\quad\text{（と置く）}$$

一般に $\begin{cases}a_n=a_{n-1}^2+b_{n-1}^2N\\ b_n=2a_{n-1}b_{n-1}\end{cases}$ ($n$=1,2,…)　と定義する．

ここで　$\dfrac{a_0}{b_0}>\sqrt{N}$　から　$a_0^2-b_0^2N>0$．ゆえに左辺が０に最も近いのが最も近似がよいわけで，それは　$a_0^2-b_0^2N=1$，すなわち Pell 方程式の解のときである．このとき

$$a_1=a_0^2+b_0^2N=a_0^2+(a_0^2-1)=2a_0^2-1$$

また

$$\begin{aligned}a_2&=a_1^2+b_1^2N=a_1^2+(2a_0b_0)^2N=a_1^2+(2a_0^2)(2b_0^2N)\\&=a_1^2+(a_1+1)(2a_0^2-2)=a_1^2+(a_1+1)(a_1+1-2)=2a_1^2-1\end{aligned}$$

$a_3, a_4, \cdots$も同様にして，一般に $a_n = 2a_{n-1}{}^2 - 1$ が得られる．

(ii) $\dfrac{a_0}{b_0} < \sqrt{N}$ のときは (i) と同様にして不等号に注意してやると

$$\sqrt{N} - \frac{a_0}{b_0} = \frac{b_0{}^2 N - a_0{}^2}{b_0(a_0 + b_0\sqrt{N})} \lessapprox \frac{b_0{}^2 N - a_0{}^2}{b_0\left(a_0 + b_0\dfrac{a_0}{b_0}\right)} = \frac{b_0{}^2 N - a_0{}^2}{2a_0 b_0},$$

$$\therefore \sqrt{N} \lessapprox \frac{a_0}{b_0} + \frac{b_0{}^2 N - a_0{}^2}{2a_0 b_0} = \frac{a_0{}^2 + b_0{}^2 N}{2a_0 b_0} \equiv \frac{a_1}{b_1}.$$

そして $a_1{}^2 - b_1{}^2 N = (a_0{}^2 + b_0{}^2 N)^2 - (2a_0 b_0)^2 N = (a_0{}^2 - b_0{}^2 N)^2$ だから $\dfrac{a_1}{b_1} > \sqrt{N}$ となる．ゆえに$\dfrac{a_1}{b_1}$を初期値にとれば (i) に帰着する．

**註5** 會田安明の上記の書「算法零約術坤之巻」巻上では，連分数の利用が説明されている．それには既知の数値

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488$$

を連分数に直す仕方を述べ，

$$\sqrt{2} = \left[1;\underbrace{2,\cdots,2}_{16ケ},3,1,1,11,2,3,2,1,1,1,25,1,2,3\right]$$

としている．実は$\sqrt{2} = [1;\dot{2}]$であるのに，このようになるのは小数表示の桁数によるものであると云って，$1.4142 = [1;2,2,2,2,2,1]$，$1.414213 = \left[1;\underbrace{2,\cdots,2}_{7ケ},1\right]$，等のいくつもの実験結果から結論づけている．

さらに，連分数展開の周期についても（例えば$[a_0; a_1, a_2, \cdots]$であるとき $a_0$, $a_1$, …を順に子，丑，…と名付けているが）

「又按ズルニ子ノ段数ノ倍段ヲ得ルハ一周ノ終リナリ」

と述べている．すなわち $a_r$=$2a_0$ となったら $a_1$, …, $a_r$が周期であることを知っていたと思われる．100 までの素数についての表示を与えている．便宜のために記すと，

$\sqrt{2} = [1;\dot{2}]$，$\sqrt{3} = [1;\dot{1},\dot{2}]$，$\sqrt{5} = [2;\dot{4}]$，$\sqrt{7} = [2;\dot{1},1,1,\dot{4}]$，$\sqrt{11} = [3;\dot{3},\dot{6}]$，$\sqrt{13} = [3;\dot{1},1,1,1,\dot{6}]$，

$\sqrt{17} = [4;\dot{8}]$，$\sqrt{19} = [4;\dot{2},1,3,1,2,\dot{8}]$，$\sqrt{23} = [4;\dot{1},3,1,\dot{8}]$，$\sqrt{29} = [5;\dot{2},1,1,2,\dot{10}]$，

$\sqrt{31} = [5;\dot{1},1,3,5,3,1,1,\dot{10}]$，$\sqrt{37} = [6;\dot{6},\dot{12}]$，$\sqrt{41} = [6;\dot{2},2,\dot{12}]$，$\sqrt{43} = [6;\dot{1},1,3,1,5,1,3,1,1,\dot{12}]$，

$$\sqrt{47}=\left[6;\dot{1},5,1,\dot{12}\right],\quad \sqrt{53}=\left[7;\dot{3},1,1,3,\dot{14}\right],\quad \sqrt{59}=\left[7;\dot{1},1,1,1,1,\dot{14}\right],$$

$$\sqrt{61}=\left[7;\dot{1},4,3,1,2,2,1,3,4,1,\dot{14}\right],\quad \sqrt{67}=\left[8;\dot{5},2,1,1,7,1,1,2,5,\dot{16}\right],$$

$$\sqrt{71}=\left[8;\dot{2},2,1,7,1,2,2,\dot{16}\right],\quad \sqrt{73}=\left[8;\dot{1},1,5,5,1,1,\dot{16}\right],\quad \sqrt{79}=\left[8;\dot{1},7,1,\dot{16}\right],$$

$$\sqrt{83}=\left[9;\dot{9},\dot{18}\right],\quad \sqrt{89}=\left[9;\dot{2},3,3,2,\dot{18}\right],\quad \sqrt{97}=\left[9;\dot{1},5,1,1,1,1,1,1,5,1,\dot{18}\right]$$

**註6**　定理1についての伊藤朋幸氏の方法を延長すれば，次のことがいえる．

$$\begin{pmatrix} a & Nb \\ b & a \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} a^3+3Nab^2 & 3Na^2b+N^2b^3 \\ 3a^2b+Nb^3 & a^3+3Nab^2 \end{pmatrix}$$

であるから，

$$\begin{cases} a_n=a_{n-1}({a_{n-1}}^2+3N{b_{n-1}}^2) \\ b_n=b_{n-1}(3{a_{n-1}}^2+N{b_{n-1}}^2) \end{cases}\quad (n=1,2,\cdots) \tag{13}$$

と定義すれば，

$$\begin{pmatrix} a_n & Nb_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{n-1} & Nb_{n-1} \\ b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}^3=\cdots=\begin{pmatrix} a_0 & Nb_0 \\ b_0 & a_0 \end{pmatrix}^{3^n}$$

となる．そこで，もしPell方程式 ${a_0}^2-N{b_0}^2=1$ が成立すれば，

$$\begin{vmatrix} a_n & Nb_n \\ b_n & a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_0 & Nb_0 \\ b_0 & a_0 \end{vmatrix}^{3^n}=1,$$

すなわち

$${a_n}^2-N{b_n}^2=1\quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{14}$$

で(13)は次のようになる：

$$\begin{cases} a_n=a_{n-1}(4{a_{n-1}}^2-3) \\ b_n=b_{n-1}(4{a_{n-1}}^2-1) \end{cases}\quad (n=1,2,\cdots) \tag{15}$$

またもし， ${a_0}^2-N{b_0}^2=-1$ が成立するならば， $\begin{vmatrix} a_n & Nb_n \\ b_n & a_n \end{vmatrix}=(-1)^{3^n}=-1$ であるから，

${a_n}^2-N{b_n}^2=-1$ で，(13)は次のようになる．

$$\begin{cases} a_n=a_{n-1}(4{a_{n-1}}^2+3) \\ b_n=b_{n-1}(4{a_{n-1}}^2+1) \end{cases}\quad (n=1,2,\cdots) \tag{16}$$

いずれにしても $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\sqrt{N}$ は当然である．

**例7** $N=2$, $a_0=3$, $b_0=2$ $\left(a_0{}^2-Nb_0{}^2=1\right)$とすると$\dfrac{a_0}{b_0}=\alpha_1$,

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{3(4\cdot3^2-3)}{2(4\cdot3^2-1)}=\frac{99}{70}=\underline{1.414}28571428=\alpha_5$$

$$\frac{a_2}{b_2}=\frac{99(4\cdot99^2-3)}{70(4\cdot99^2-1)}=\frac{3{,}880{,}899}{2{,}744{,}210}=\underline{1.41421356237}=\alpha_{17}$$

**例8** $N=2$, $a_0=7$, $b_0=5$ $\left(a_0{}^2-Nb_0{}^2=-1\right)$ とすると$\dfrac{a_0}{b_0}=\alpha_2$,

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{7(4\cdot7^2+3)}{5(4\cdot7^2+1)}=\frac{1{,}393}{985}=\underline{1.414213}19796=\alpha_8$$

$$\frac{a_2}{b_2}=\frac{1{,}393(4\cdot1393^2+3)}{985(4\cdot1393^2+1)}=\frac{10{,}812{,}186{,}007}{7{,}645{,}370{,}045}=\underline{1.41421356237}=\alpha_{26}$$

**註7**　會田安明の，さきに引用した著書「算法零約術乾之巻」には，$\sqrt{2}$ を求める漸化式として次のものも与えている：$a_{-1}=1,\ b_{-1}=0,\ a_0=4,\ b_0=3,$ かつ

$$\begin{cases}a_{2n+1}=4a_{2n}+a_{2n-1} & (n=0,1,2,\cdots)\\ a_{2n}=8a_{2n-1}+a_{2n-2} & (n=1,2,\cdots)\end{cases}$$

$$\begin{cases}b_{2n+1}=4b_{2n}+b_{2n-1} & (n=0,1,2,\cdots)\\ b_{2n}=8b_{2n-1}+b_{2n-2} & (n=1,2,\cdots)\end{cases}$$

とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{2}$.

この証明は，和算家に倣って「遺題」としておこう．実は，會田はこの結果（術）をまず述べて，それから定理２の $N$=2 の場合にあたる漸化式を出しているのである．しかし一般の $N$ は扱っていない．

**謝辞**　本稿をまとめる上で次の方々のご助言を頂きました．厚く御礼申し上げます．
大阪教育大学名誉教授 中村正弘氏，茨城大学名誉教授 武田二郎氏，
信州大学工学部 山崎基弘氏，宮城県第一女子高等学校 伊藤朋幸氏

(2002 年 6 月 30 日)

Pellの方程式　$x^2-Ny^2=1$　の$N$に対する最小解$x$, $y$

| $N$ | $x$ | $y$ | $N$ | $x$ | $y$ | $N$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 2 | 37 | 73 | 12 | 69 | 7775 | 936 |
| 3 | 2 | 1 | 38 | 37 | 6 | 70 | 251 | 30 |
| 5 | 9 | 4 | 39 | 25 | 4 | 71 | 3480 | 413 |
| 6 | 5 | 2 | 40 | 19 | 3 | 72 | 17 | 2 |
| 7 | 8 | 3 | 41 | 2049 | 320 | 73 | 2281249 | 267000 |
| 8 | 3 | 1 | 42 | 13 | 2 | 74 | 3699 | 430 |
| 10 | 19 | 6 | 43 | 3482 | 531 | 75 | 26 | 3 |
| 11 | 10 | 3 | 44 | 199 | 30 | 76 | 57799 | 6630 |
| 12 | 7 | 2 | 45 | 161 | 24 | 77 | 351 | 40 |
| 13 | 649 | 180 | 46 | 24335 | 3588 | 78 | 53 | 6 |
| 14 | 15 | 4 | 47 | 48 | 7 | 79 | 80 | 9 |
| 15 | 4 | 1 | 48 | 7 | 1 | 80 | 9 | 1 |
| 17 | 33 | 8 | 50 | 99 | 14 | 82 | 163 | 18 |
| 18 | 17 | 4 | 51 | 50 | 7 | 83 | 82 | 9 |
| 19 | 170 | 39 | 52 | 649 | 90 | 84 | 55 | 6 |
| 20 | 9 | 2 | 53 | 66249 | 9100 | 85 | 285769 | 30996 |
| 21 | 55 | 12 | 54 | 485 | 66 | 86 | 10405 | 1122 |
| 22 | 197 | 42 | 55 | 89 | 12 | 87 | 28 | 3 |
| 23 | 24 | 5 | 56 | 15 | 2 | 88 | 197 | 21 |
| 24 | 5 | 1 | 57 | 151 | 20 | 89 | 500001 | 53000 |
| 26 | 51 | 10 | 58 | 19603 | 2574 | 90 | 19 | 2 |
| 27 | 26 | 5 | 59 | 530 | 69 | 91 | 1574 | 165 |
| 28 | 127 | 24 | 60 | 31 | 4 | 92 | 1151 | 120 |
| 29 | 9801 | 1820 | 61 | 1766319049 | 226153980 | 93 | 12151 | 1260 |
| 30 | 11 | 2 | 62 | 63 | 8 | 94 | 2143295 | 221064 |
| 31 | 1520 | 273 | 63 | 8 | 1 | 95 | 39 | 4 |
| 32 | 17 | 3 | 65 | 129 | 16 | 96 | 49 | 5 |
| 33 | 23 | 4 | 66 | 65 | 8 | 97 | 62809633 | 6377352 |
| 34 | 35 | 6 | 67 | 48842 | 5967 | 98 | 99 | 10 |
| 35 | 6 | 1 | 68 | 33 | 4 | 99 | 10 | 1 |

(竹内端三, 「整数論」より転載した)

(参考) さらに$N$=109のとき$x$=158,070,671,986,249, $y$=15,140,424,455,100.

會田安明「算法零約術坤之巻」には$N$=2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 に対する解が掲載されている.